Příklad 1 (lehký)

Trajektorie harmonického pohybu je dána rovnicí $y(t) = 5 \cdot \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$, kde dosazujeme čas t v sekundách a na výstupu získáváme výchylku y v cm. Urči rychlost oscilátoru v čase $t = 1s$.

Řešení:

Okamžitá rychlost harmonického oscilátoru je dána vzorcem

$$v(t) = v_m \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right) \tag{1}$$

Budeme tedy potřebovat maximální rychlost v_m, úhlovou frekvenci ω a fázi φ. Abychom tyto veličiny určili, musíme se podívat na předpis trajektorie. Obecný předpis zní:

$$y(t) = y_m \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

Srovnáním se zadáním

$$y(t) = 5 \cdot \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

zjistíme, že $y_m = 5cm, \omega = 3Hz, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ještě potřebujeme maximální rychlost, která se ovšem snadno určí ze vzorce $v_m = \omega \cdot y_m = 3 \cdot 5 = 15\frac{cm}{s}$.

Nyní už můžeme snadno dosadit do vzorce (1) a zjistit okamžitou rychlost v čase $t = 1s$:

$$v(1) = 15 \cdot \cos\left(3 \cdot 1 + \frac{\pi}{2}\right) = -2,11\frac{cm}{s}.$$

Příklad 2 (těžký)

Vychýlíme kyvadlo z rovnovážné polohy o úhel $\alpha = 6°$ a poté z klidu pustíme. Při jednom kyvu urazí dráhu 24 cm.

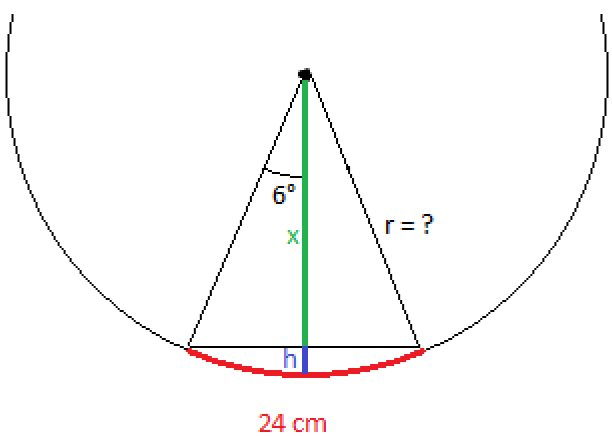
a) Jaká je perioda kmitů?

b) Jak dlouho trvá jeden kmit?

c) Jaká je rychlost při průchodu nejnižší polohou (nápověda: použij zákon zachování energie)

Řešení:

a) Křivka, po které se závaží na kyvadlu pohybuje, je kružnicový oblouk. Pro určení periody kmitů podle vzorce $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ potřebujeme délku závěsu, což je geometricky poloměr zmíněného kružnicového oblouku.



Délka kružnicového oblouku d se vypočítá jako

$$d = \varphi \cdot r$$

kde φ je úhel příslušející k oblouku, vyjádřený v radiánech. V tomto případě se jedná o úhel $2\alpha = 12° = 0.209$ rad. Z výše uvedeného vzorce vyjádříme poloměr kružnice:

$$r = \frac{d}{\varphi} = \frac{d}{2\alpha} = \frac{24}{0.209} = 114.6cm = 1,146m$$

Tím jsme určili délku závěsu $L = r$. Perioda kmitání se poté vypočítá takto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.146}{9.81}} = 2,14s$$

b) Zatímco kmit je definován jako "zhoupnutí tam a zpět", kyv je definován pouze jako přesun z jedné krajní polohy do druhé. Protože pohyb je symetrický, bude kyv trvat trvat polovinu periody kmitů, tedy pouze 1,07 s.

c) Potenciální energie pramení z toho, že závaží se nachází v tíhovém poli Země a v krajní poloze je závaží ve větší výšce než v poloze rovnovážné. Označme rozdíl těchto výšek h (viz obrázek). Potom kinetická energie v krajní poloze je nulová (kyvadlo chvíli "stojí na místě"), zatímco potenciální energie je rovna:

$$E_p = mgh$$

Naopak střední (tj. rovnovážné) poloze je rovna potenciální energie nulová, kdežto kinetická energie je rovna:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Ze zákona zachování energie plyne:

$$E_k = E_p$$

Odtud po dosazení předchozích vztahů:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

Nás zajímá rychlost v poloze, kde je kyvadlo nejníž, což je právě ve střední poloze. Vyjádříme tedy ze vzorce hodnotu v:

$$v = \sqrt{2gh} \tag{2}$$

Všimněme si, že ze vzorce zmizela závislost na hmotnosti závaží, nebudeme ji tedy k výpočtu vůbec potřebovat. Pro dokončení výpočtu tedy zbývá určit převýšení h.

Z geometrie obrázku je vidět, že $h = r - x$, kde vzdálenost x určíme z pravoúhlého trojúhelníku pomocí funkce cosinus jako $x = r\cos\alpha = 114,6 \cdot \cos 6° = 114,0cm$. Odtud tedy $h = 114,6 - 114,0 = 0,6cm$.

Rychlost ve střední poloze tedy je dle vzorce (2) rovna:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.6} = 3,43\frac{cm}{s}$$

Příklad 3 (lehký)
Harmonický oscilátor s tuhostí pružiny $k = 0.68\frac{N}{m}$ kmitá s úhlovou frekvencí 2,61 Hz.
a) Urči hmotnost závaží.
b) Závaží umístíme v klidu do rovnovážné polohy, poté závaží odebereme. O kolik cm se pružina zkrátí?

Řešení:
a) Máme zadanou tuhost pružiny k, úhlovou frekvenci ω a chceme určit hmotnost závaží m. Tyto tři veličiny jsou svázány vzorcem pro výpočet úhlové frekvence:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vyjádříme-li odtud neznámou m, dostaneme:

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{0,68}{2,61^2} = 0,10kg = 100g$$

b) Na závaží působí dvě síly: síla pružiny a síla gravitační. Tyto dvě síly musí být stejně velké a opačně orientované, aby nastala rovnováha (závaží bylo v klidu).

Síla pružiny je z Hookova zákona rovna $F = ky$ (znaménko teď nebudeme řešit, protože nám jde pouze o velikost síly, ne o její směr). Síla gravitační je rovna $F_g = mg$. Protože síly jsou stejně velké, bude platit:

$$ky = mg$$

Odkud můžeme vyjádřit protažení pružiny y jako:

$$y = \frac{mg}{k} = \frac{0,10 \cdot 9,81}{0,68} = 1,44m = 144cm$$

Pružina by se tedy měla zkrátit o 144 cm. Takový výsledek by nás měl překvapit, 144 cm je hrozně moc. Důvodem je fakt, že tuhost pružiny jsem zvolil nereálně malou, a tedy i malé závaží ji natáhne opravdu hodně. Jedná se tedy o příklad s nereálnými parametry. Do písemky vymyslím parametry více odpovídající skutečnosti, aby i výsledku byly "rozumné". Postup by byl ale jinak stejný. :-)